

Формулы по теории вероятностей

І. Случайные события

1. Основные формулы комбинаторики

а) перестановки $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$.

б) размещения $A_n^m = n \cdot (n-1) \dots (n-m+1)$.

в) сочетания $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

2. Классическое определение вероятности.

$P(A) = \frac{m}{n}$, где m - число благоприятствующих событию A исходов, n - число всех элементарных равновозможных исходов.

3. Вероятность суммы событий

Теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

4. Вероятность произведения событий

Теорема умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A),$$

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

$P(A|B)$ - условная вероятность события A при условии, что произошло событие B ,

$P(B|A)$ - условная вероятность события B при условии, что произошло событие A .

5. Формула полной вероятности

$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)$, где H_1, H_2, \dots, H_n - полная группа гипотез, то есть

$H_i \cdot H_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega, \Omega$ - достоверное событие.

6. Формула Байеса (формула Бейеса). Вычисление апостериорных вероятностей гипотез

$P(H_m | A) = \frac{P(H_m)P(A|H_m)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)}$, $m = 1, \dots, n$, где H_1, H_2, \dots, H_n - полная группа гипотез.

7. Формула Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} - \text{вероятность появления события ровно } k$$

раз при n независимых испытаниях, p - вероятность появления события при одном испытании.

8. Наивероятнейшее число наступления события.

Наивероятнейшее число k_0 появления события при n независимых испытаниях:

$$np - (1-p) \leq k_0 < np + p, \quad p - \text{вероятность появления события при одном испытании.}$$

9. Локальная формула Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) - \text{вероятность появления события ровно } k \text{ раз при } n \text{ независимых}$$

испытаниях, p - вероятность появления события при одном испытании, $q = 1 - p$.

10. Интегральная формула Лапласа

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \text{вероятность появления события не менее } k_1 \text{ и не}$$

более k_2 раз при n независимых испытаниях, p - вероятность появления события при одном испытании, $q = 1 - p$.

11. Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности p :

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right).$$

II. Случайные величины

12. Ряд распределения дискретной случайной величины

x_i	x_1	x_2	x_n
p_i	p_1	p_2	p_n

Сумма вероятностей всегда равна 1. $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

13. Функция распределения (интегральная функция распределения)

Функция распределения случайной величины X определяется по формуле $F(x) = P(X < x)$. Это неубывающая функция, принимающая значения от 0 до 1. Если

задана плотность распределения $f(x)$, то функция распределения выражается как

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

14. Плотность распределения (дифференциальная функция распределения)

Плотность распределения случайной величины X определяется по формуле $f(x) = F'(x)$. Существует только для непрерывной случайной величины. Для нее

выполняется условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ (площадь под кривой равна 1).

15. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал

Может быть вычислена двумя способами:

1) через функцию распределения $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

2) через плотность распределения $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

16. Математическое ожидание случайной величины

1) Для дискретной случайной величины X , заданной рядом распределения:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

1) Для непрерывной случайной величины X , заданной плотностью распределения :

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x dx.$$

17. Дисперсия случайной величины

По определению дисперсия – это второй центральный момент:

$$D(X) = M\left([X - M(X)]^2\right) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

1) Для дискретной случайной величины X , заданной рядом распределения:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i\right)^2$$

1) Для непрерывной случайной величины X , заданной плотностью распределения :

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - M(X))^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^2 dx - (M(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^2 dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x dx\right)^2.$$

18. Среднее квадратическое отклонение случайной величины

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

19. Начальный момент r -го порядка случайной величины

$$\nu_r = M(X^r).$$

В частности, первый начальный момент – это математическое ожидание:

$$\nu_1 = M(X^1) = M(X)$$

20. Центральный момент r – го порядка случайной величины

$$\mu_r = M\left([X - M(X)]^r\right)$$

В частности, второй центральный момент – это дисперсия:

$$\mu_2 = M\left([X - M(X)]^2\right) = D(X).$$

21. Асимметрия

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Коэффициент асимметрии положителен, если правый хвост распределения длиннее левого (правая часть кривой более пологая), и отрицателен в противном случае. Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то его коэффициент асимметрии равен нулю.

22. Эксцесс

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Коэффициент эксцесса нормального распределения равен нулю. Он положителен, если пик распределения около математического ожидания острый, и отрицателен, если пик гладкий.

III. Распределения случайных величин

21. Биномиальное распределение (дискретное)

X - количество «успехов» в последовательности из n независимых случайных экспериментов, таких что вероятность «успеха» в каждом из них равна p . $q = 1 - p$.

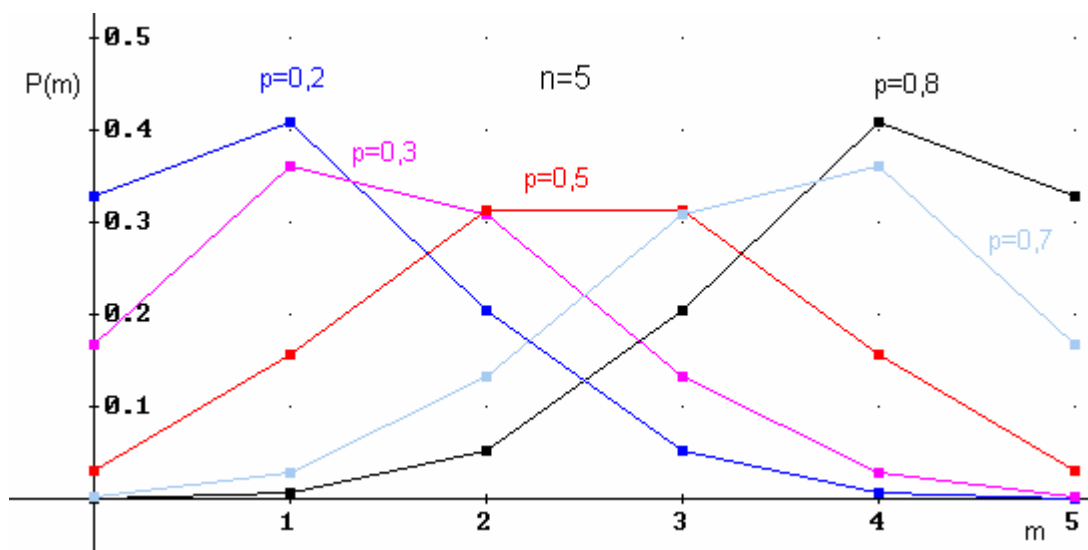
Закон распределения X имеет вид:

x_k	0	1	k	n
p_k	q^n	$n \cdot p \cdot q^{n-1}$		$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$		p^n

Здесь вероятности находятся по формуле Бернулли: $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Характеристики: $M(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma = \sqrt{npq}$

Примеры многоугольников распределения для $n = 5$ и различных вероятностей:



22. Пуассоновское распределение (дискретное)

Распределение Пуассона моделирует случайную величину, представляющую собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга.

При условии $p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, np \rightarrow \lambda = const$ закон распределения Пуассона является предельным случаем биномиального закона. Так как при этом вероятность p события A в каждом испытании мала, то закон распределения Пуассона называют часто законом редких явлений.

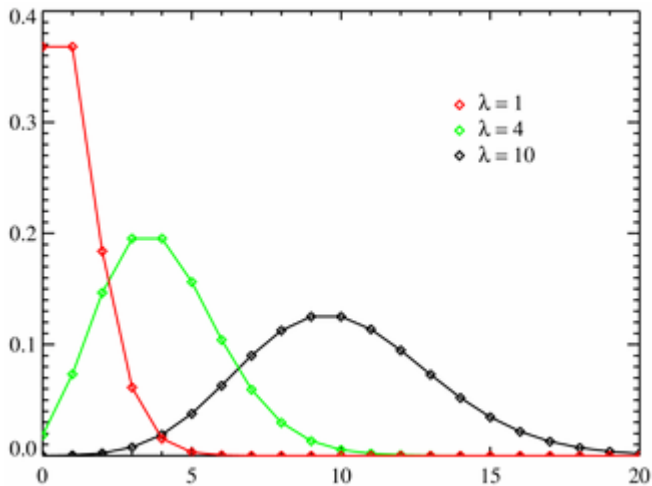
Ряд распределения:

x_k	0	1	k
p_k	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Вероятности вычисляются по формуле Пуассона: $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Числовые характеристики: $M(X) = \lambda, D(X) = \lambda, \sigma = \sqrt{\lambda}$

Разные многоугольники распределения при $\lambda = 1; 4; 10$.



23. Показательное распределение (непрерывное)

Экспоненциальное или показательное распределение — абсолютно непрерывное распределение, моделирующее время между двумя последовательными свершениями одного и того же события.

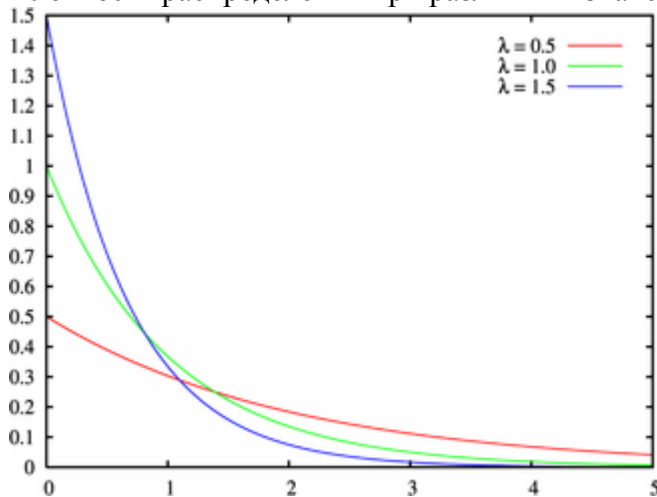
Плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Где $\lambda > 0$.

Числовые характеристики: $M(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma = \frac{1}{\lambda}$

Плотность распределения при различных значениях $\lambda > 0$.



24. Равномерное распределение (непрерывное)

Равномерный закон распределения используется при анализе ошибок округления при проведении числовых расчётов (например, ошибка округления числа до целого распределена равномерно на отрезке $[-0,5; 0,5]$), в ряде задач массового обслуживания,

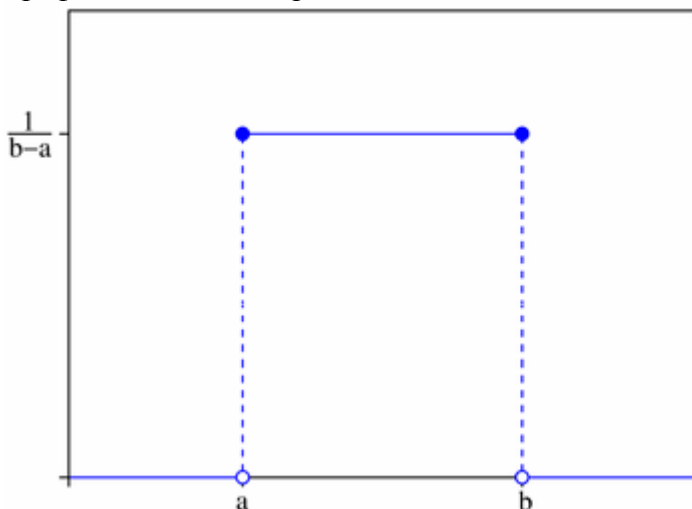
при статистическом моделировании наблюдений, подчинённых заданному распределению.

Плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

Числовые характеристики: $M(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

График плотности вероятностей:



25. Нормальное распределение или распределение Гаусса (непрерывное)

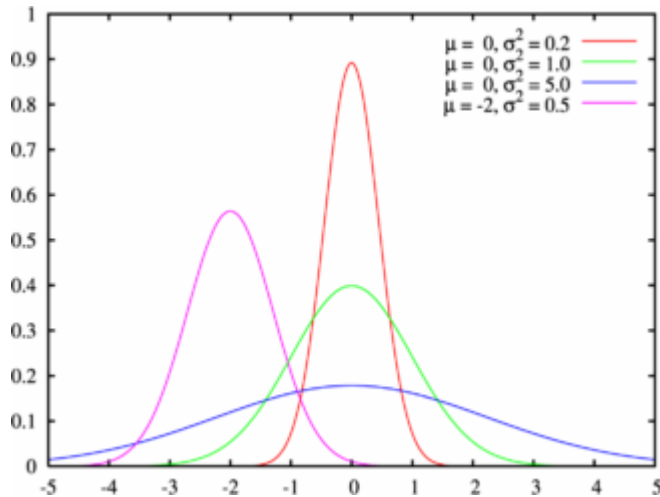
Нормальное распределение, также называемое распределением Гаусса, – распределение вероятностей, которое играет важнейшую роль во многих областях знаний, особенно в физике. Физическая величина подчиняется нормальному распределению, когда она подвержена влиянию огромного числа случайных помех. Ясно, что такая ситуация крайне распространена, поэтому можно сказать, что из всех распределений в природе чаще всего встречается именно нормальное распределение — отсюда и произошло одно из его названий.

Плотность распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Числовые характеристики: $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$, $\sigma = \sigma$

Пример плотности распределения:



Нормальный закон распределения случайной величины с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называется стандартным или нормированным, а соответствующая нормальная кривая - стандартной или нормированной.

$$\text{Функция Лапласа } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал $(\alpha; \beta)$

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины X на величину δ от математического ожидания (по модулю).

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

IV. Другие формулы

26. Неравенство Чебышева

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

27. Неравенство Маркова

$$P(X \leq \varepsilon) > 1 - \frac{MX}{\varepsilon}$$

28. Математическое ожидание функции одной случайной величины

$$M[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \cdot p_i$$

29. Корреляционный момент системы случайных величин X и Y

$$\mu_{XY} = M\left(\left[X - M(X)\right] \cdot \left[Y - M(Y)\right]\right) = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y)$$

30. Коэффициент корреляции системы случайных величин X и Y

$$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

31. Пуассоновский поток событий

$$p_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$$